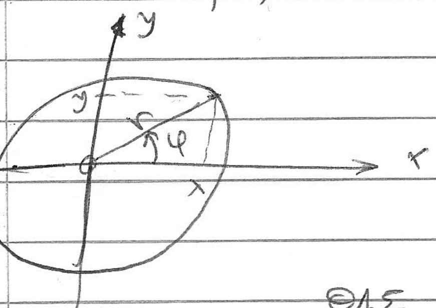
22/02/16

ΘΑΣ: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ και $f: U \to \mathbb{R}^n$, C^1 με $D\bar f(\bar x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος ($\Leftrightarrow \det D\bar f(\bar x_0) \neq 0$)

Τότε: $\Rightarrow$ $\exists$ U_0 ανοικτό με $\bar x_0 \in U_0 \subset U$ και $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό: $f|_{U_0}: U_0 \to V$ είναι 1-1 και επί και η $\bar g = (\bar f|_{U_0})^{-1}: V \to U_0$ είναι C^1 με $D\bar g(\bar y) = [D\bar f(\bar g(\bar y))]^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, όπου $D\bar f(\bar g(\bar y)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος. $\forall \bar y \in V$.

Παράδειγμα (Πολικές Συντεταγμένες): $f:(0,+\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\bar f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$D\bar f(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\boxed{\det D\bar f(r,\varphi) = r > 0}$ (και φυσικά, $\bar f \in C^1$)

$\xRightarrow{ΘΑΣ}$ $\forall (r_0,\varphi_0) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$, $\exists$ U ανοικτό $\subset \mathbb{R}^2$ με $(r_0,\varphi_0)\in U$ ώστε $\bar f$ να είναι τοπικά αντιστρέψιμη (δηλ. $\bar f|_{U_0}$ να είναι αντιστρέψιμη) και η αντιστροφή της, $\bar g = (\bar f|_{U_0})^{-1}$ να είναι C^1 και

$$D\bar g(\underbrace{\bar f(r,\varphi)}_{(x,y)}) = (D\bar f(r,\varphi))^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}$$

Επίσης $r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi$

$\frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi$ $\Big\}$ $\overset{(1)}{=}$ $\begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$

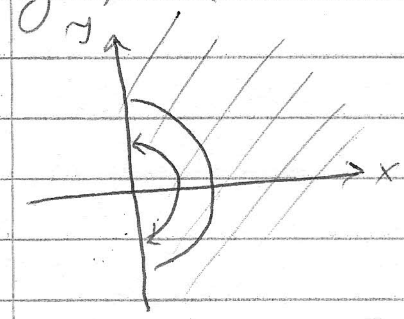
Παρατήρηση: Η $f:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, όπως παραπάνω, προφανώς δεν αντιστρέφεται ολικά αφού $\underbrace{\bar f(r,\varphi)}_{\binom{x}{y}} = \bar f(r,\varphi-2k\pi)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

Μπορούμε, όμως, περιορίζοντας την $\bar f$ να βρούμε την αντίστροφο του περιορισμού.

π.χ. $\bar g:(0,+\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $\bar g(r,\varphi) = \bar f(r,\varphi)$ τότε =

$\bar g(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{y}{x}=\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ (όπου $\cos\varphi>0$ $\forall\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

$\Rightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$



Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\bar g^{-1}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=(r,\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix} \xmapsto{\ \bar g\ } \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

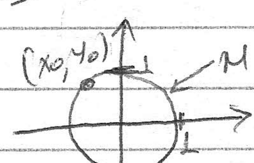
$$\begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix} \xleftarrow[\ \bar g^{-1}\ ]{} \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

Ακρότατα υπό συνθήκη

Ορισμός: Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^n$ (όχι απαραίτητα ανοικτό), $f:U\to\mathbb{R}$ και $\bar g=(g_1,\dots,g_r):U\to\mathbb{R}^r$, $r<n$.
Λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο υπό τη συνθήκη $\bar g(\bar x)=\bar 0$ στο σημείο $\bar x_0\in M:=\{\bar x\in U:\bar g(\bar x)=\bar 0\}$ αν η $f|_M$ έχει τοπικό ακρότατο στο $\bar x_0$ (συνήθως το M δεν είναι ανοικτό άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τα συνήθη θεωρήματα) πόσες συνθήκες έχω $r=1<2=n$

Π.χ.: $\boxed{n=2}$ $g(x,y)=x^2+y^2-1$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\Rightarrow M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$



Τα τοπικά ακρότατα της $f|_M:M\to\mathbb{R}$, $f|_M(x,y)=f(x,y)$ είναι τα τοπικά ακρότατα της $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(t)=f(\underbrace{\cos t}_{=x},\underbrace{\sin t}_{=y})$

Θεώρημα (Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange): Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f:U\to\mathbb{R}$, C^1 και $\bar g=(g_1,\dots,g_r):U\to\mathbb{R}^r$, $r<n$, C^1.
Αν η f έχει στο $\bar x_0\in M:=\{\bar x\in U:\bar g(\bar x)=\bar 0\}$ τοπικό ακρότατο (υπό τη συνθήκη $\bar g(\bar x)=0$) και $D\bar g(\bar x_0)\in\mathbb{R}^{r\times n}$ είναι πίνακας βαθμίδας r, τότε $\exists\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\mathbb{R}^r$ (πολλαπλασιαστές Lagrange τα λ_i)

$$\underbrace{\nabla f(\bar x_0)}_{\in\mathbb{R}^{1\times n}}=\underbrace{\bar\lambda}_{\in\mathbb{R}^{1\times r}}\ \underbrace{D\bar g(\bar x_0)}_{\in\mathbb{R}^{r\times n}}$$